INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL II

Capítulo 1

PERT-CPM

Manuel Ramalhete
2018

PERT (Program Evaluation Review Technique)

Modelo/técnica desenvolvido no final dos anos cinquenta pela equipa de Projectos Especiais da Marinha norte Americana em conjunto com a empresa Loockeed (projectos balísticos) e com a empresa de consultores Booz, Allen & Hamilton International. O projecto em causa era o projecto de “Mísseis Polaris” e foi chefiado por W. Fazar.

Neste projecto estavam envolvidos 250 empreiteiros directos e mais de 9 000 subempreiteiros, o que levantavam enormes dificuldades de coordenação. O projecto viria a concluir-se cerca de 2 anos antes da data prevista, em grande parte devido a esta nova técnica aplicada.

CPM (Critical Path Method)

Modelo desenvolvido no final dos anos cinquenta por J. E. Kelly da empresa E. I. Du Pont (química) e M. R. Walker da empresa Sperry Rand (equipamentos electrónicos e computadores).

O CPM aparece associado ao desenvolvimento de um sistema de melhoramento dos métodos de planeamento e controle de projectos de construção.

PERT e CPM aparecem associados como técnicas de planeamento e gestão de projectos e são muito semelhantes em muitos aspectos, embora na origem a sua essência tenha diferenças fundamentais.

A aplicação PERT concentra-se nas tarefas do projecto em que há incerteza quanto aos seus tempos de execução.

O CPM foca-se nos projectos em que seja fácil calcular os tempos e custos das tarefas para daí obter a combinação tempo/custo que optimiza os custos do projecto.

Em síntese, são ambos técnicas de planeamento e gestão de projectos e juntos com a designação de PERT-CPM constituem um importante capítulo da IO, em geral, e da análise de redes, em particular.

O modelo PERT-CPM tem sido utilizado com sucesso em muitas **aplicações**, nomeadamente:

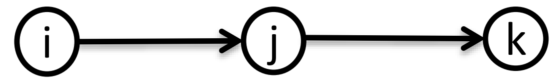
- Projectos de construção: edifícios, autoestradas, pontes, refinarias, portos, linhas férreas, hospitais, navios, etc.
- Lançamento de voos espaciais e colocação de satélites
- Transferência de um hospital, incluindo doentes, para outro local
- Instalar uma rede de computadores e fazer a manutenção geral de um grande complexo industrial
- Conceber e lançar um novo produto no mercado
- Fazer uma fusão de empresas e fazer o orçamento de uma grande empresa

Principais vantagens da técnica de PERT-CPM

- Que trabalhos fazer primeiro e quando realizar o aprovisionamento dos materiais e outros recursos necessários
- Quais os trabalhos já realizados e quais os que se seguem em cada momento
- Qual a situação do projecto em relação à data prevista
- Quais as actividades críticas
- Se o projecto está atrasado, quais as actividades em que se deve actuar para recuperar prazos
- Quais as margens das actividades e qual a duração óptima do projecto

Representação gráfica do projecto (construção da rede)

Rede AOA (Activity On Arc) – Os arcos representam as actividades**:**

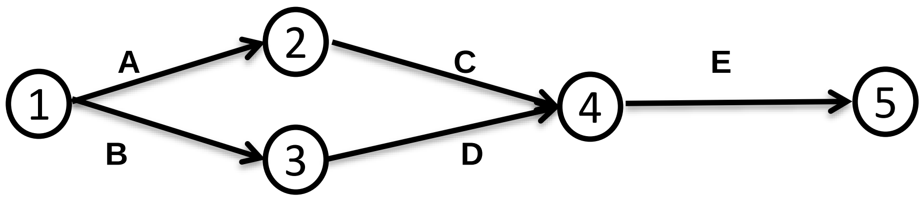


Actividade *(i, j)* precede (antecede) actividade (j, k); actividade (j, k) sucede actividade (i, j)

Nodos são acontecimentos : acontecimentos *i, j* e k

i* – acontecimento inicial da actividade *(i, j*); *j* – acontecimento final da actividade *(i, j)

Exemplo de Rede AOA:

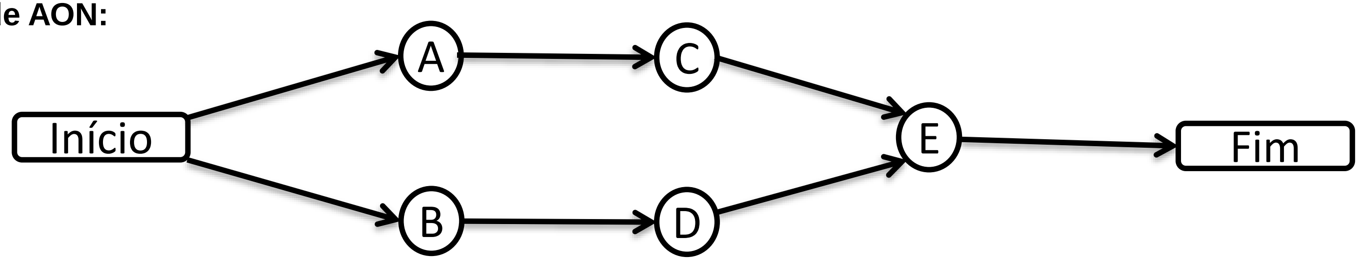


Rede AON (Activity On Nodo) – os nodos representam actividades e os arcos relações de precedência entre actividades

Actividade *i* precede (antecede) actividade *j* (actividade *j* sucede a actividade *i*):

Actividades sem actividades antecedentes são precedidas pelo nodo inicial e e actividades sem actividades sucessoras são antecedentes do nodo final. Nodo inicial e final têm duração nula:

Exemplo de Rede AON:



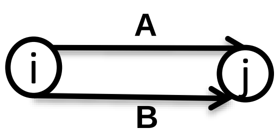
Actividades Ficticias numa rede AOA:

Actividades Fictícias – Actividades, sem existência real, com duração nula, utilizadas para explicitar relações de precedência (sequência**).** Representam-se com arcos a tracejado**.**

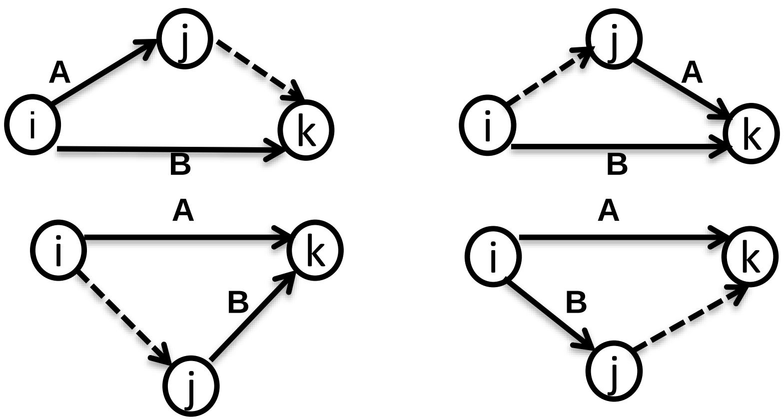
Regra 1. Cada actividade é representada por um e um só arco

Regra 2. Cada actividade deve ser identificada por 2 nodos finais (ou iniciais) distintos

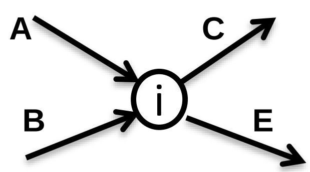
Errado :



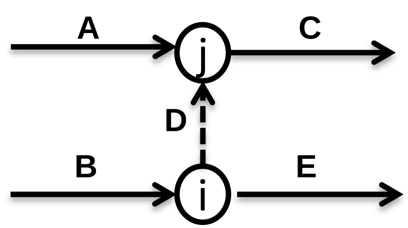
Correcto:



Errado:



Correcto:



C é precedida de A e B

E é precedida de B

Regra 3. Para manter relações de precedência correctas, cada vez que é adicionada uma actividade à rede, devem ser respondidas as seguintes questões:

a) Quais as actividades que precedem imediatamente a actividade corrente?

b) Que actividades devem seguir a actividade corrente?

c) Que actividades devem ocorrer em paralelo?

Nota. A rede AON é mais fácil de construir e não necessita de actividades fictícias. A rede AOA apresenta vantagens na visulização, gestão e acompanhamento do projecto e permite uma melhor percepção da realidade que é o projecto.

Técnica para construir uma rede AOA:

Passo 0. Representar a o nodo inicial que se faz nodo de todas as actividades sem antecedentes, representando estas.

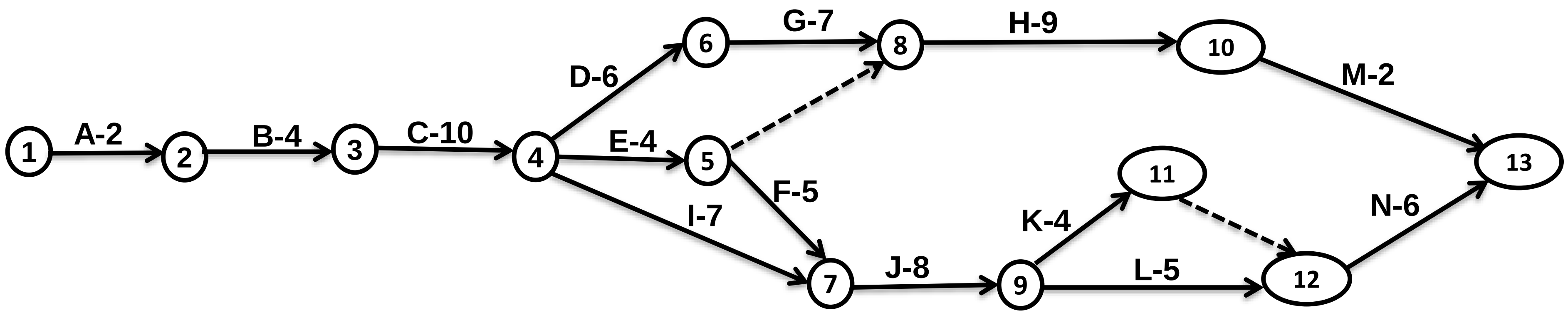
Passo 1. Se todas as actividades já estão incluídas, passa-se ao Passo 3. Caso contrário, procura-se uma actividade que ainda não tenha sido traçada e que tenha uma e uma só antecessora imediata que já esteja traçada. Traça-se essa actividade, sendo o seu nodo inicial o nodo final da sua antecessora imediata. Repete-se o passo 1, a não ser que não exista nenhuma actividade nas condições mencionadas, caso em que se prossegue com o Passo seguinte.

Passo 2. Procura-se uma actividade que ainda não tenha sido traçada e que tenha duas ou mais antecessoras imediatas que á tenham sido traçadas. Representam-se os nodos finais destas actividades se necessário, e criam-se actividadesfictícias que finalizam no nodo inicial da actividade encontrada, que agora passa a ser traçada. Voltar ao Passo 1.

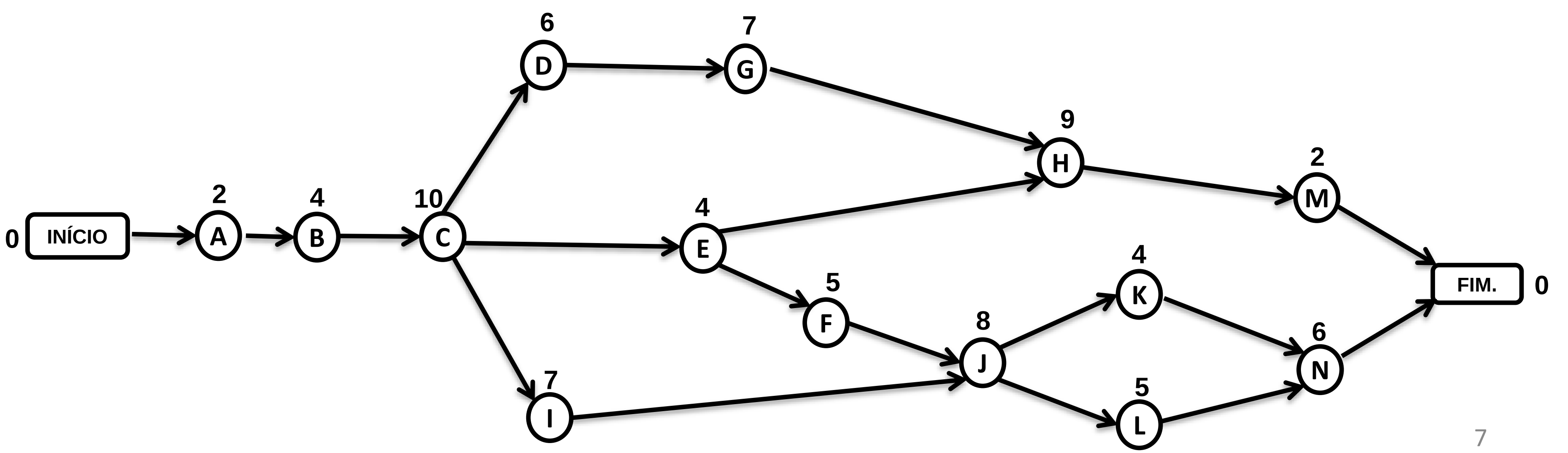
Passo 3. Representa-se o acontecimento final do projecto, que se faz nodo final de todas as actividades às quais ainda não tenha sido atribuída nodo final.

Nota. No fim eliminam-se as actividades fictícias desnecessárias.

Exemplo protótipo. Rede AOA:



Exemplo protótipo. Rede AON:



Determinação do Caminho Crítico

Objectivos:

(1) **Duração** total do projecto
(2) Classificação das **Actividades** entre **Críticas** e **Não críticas**

***d*(i, j)** – duração da actividade (i, j). É o tempo que esta actividade demora a ser executada.

DC_j – Data mais cedo do acontecimento j. É o momento mais cedo para o qual todas as actividades que antecedem j podem estar completas. Pode representar-se pelo símbolo □ e é dada por:

$$DC_j = \max_{i \in \Gamma^{-1}(j)} \{ DC_i + d(i,j) \}$$, em que $\Gamma^{-1}(j)$ é o conjunto dos acontecimentos antecedentes de j.

DT_i – Data mais tarde do acontecimento i. É o momento mais tarde para o qual todas as actividades que antecedem i devem estar concluídas sem por em causa a data de finalização do projecto. Pode representar-se pelo símbolo △ e é dada por:

$$DT_i = \min_{j \in \Gamma(i)} \{ DT_j - d(i,j) \},$$ em que $\Gamma(i)$ é o conjunto dos acontecimentos sucessores imediatos de i.

As datas mais cedo dos acontecimentos são calculadas num quadro, ou na própria rede inscritas no símbolo indicado, através de um processo progressivo partindo de $DC_1 = 0$.

As datas mais tarde dos acontecimentos são calculadas num quadro, ou na própria rede inscritas no símbolo indicado, através de um processo regressivo e fixando a data mais cedo do acontecimento final igual à sua data mais tarde, isto é, $\boldsymbol{DC_F = DT_F}$ (duração do projecto e do caminho mais longo entre os dois acontecimentos).

DCI(i, j) = $\boldsymbol{DC_i}$ **–** Data mais cedo de início da actividade ***(i, j)***

DCF(i, j)* –** Data mais cedo de finalização da actividade ***(i, j): ***DCF(i, j) = DCI(i, j) + d(i, j)***

DTF(i, j) = $\boldsymbol{DT_j}$ **–** Data mais tarde de finalização da actividade ***(i, j)***

DTI(i, j)* –** Data mais tarde de início da actividade ***(i, j): ***DTI(i, j) = DTF(i, j) – d(i, j)***

MT(i, j)* –** Margem Total da actividade ***(i, j): Atraso máximo da actividade sem alterar o acontecimento final dentro do prazo definido

K(i, j)* –** Atraso da actividade ***(i, j) sem comprometer a data de finalização do projecto: ***MT(i, j) = max K(i, j)***

$$DC_i + d(i,j) + K(i,j) \le DT_j \Rightarrow K(i,j) \le DT_j - DC_i - d(i,j) \Rightarrow \max K(i,j) = DT_j - DC_i - d(i,j)$$

$$MT(i,j) = \boxed{DT_j - DC_i - d(i,j)} = DTF(i,j) - DCF(i,j) = DTI(i,j) - DCI(i,j)$$

Actividade Crítica – Actividade com margem total nula

Caminho Critico – Caminho do acontecimento inicial (início do projecto) até ao acontecimento final (fim do projecto) constituído por actividades críticas.

Nota 1. O caminho crítico é o caminho mais longo entre o nodo inicial e o nodo final.

Nota 2. A duração do caminho crítico representa a duração do projecto sem atrasos (nem adiantamentos).

ML(i, j)* –** Atraso máximo da actividade ***(i, j) sem alterar a data mais cedo do acontecimento seguinte ***(j)***

K(i, j)* –** Atraso da actividade ***(i, j) sem comprometer a data mais cedo do acontecimento ***j***

$DC_i + d(i,j) + K(i,j) \leq DC_j \Rightarrow K(i,j) \leq DC_j - DC_i - d(i,j)\ DC_j \Rightarrow \max K(i,j) = DC_j - DC_i - d(i,j)$

$$ML(i,j) = \boxed{DC_j - DC_i - d(i,j)} = DC_j - [DC_i + d(i,j)] = DC_j - DCF(i,j)$$

$MT(i,j) \geq ML(i,j)$

Utilização da PL para determinar o Caminho Crítico

Modelo 1: **Minz** = $\boldsymbol{x_F}$ - $\boldsymbol{x_I}$

s.a: $\boldsymbol{x_j}$ - $\boldsymbol{x_i}$ ≥ $\boldsymbol{d(i,j)}$ $\boldsymbol{para\ todos\ os\ arcos\ (i,j)}$

$\boldsymbol{x_j} \geq 0$

$\boldsymbol{x_j}$ **-** Momento (tempo) de ocorrência do acontecimento ***j***

$\boldsymbol{x_I}$ **-** Momento (tempo) de ocorrência do acontecimento inicial ***(***$\boldsymbol{x_I}$ ***= 0)***

$\boldsymbol{x_F}$ **-** Momento (tempo) de ocorrência do acontecimento final

Nota. Este problema tem em geral muitas soluções. No óptimo, o valor de $\boldsymbol{x_j}$ pode assumir qualquer valor entre $\boldsymbol{DC_j}$ e $\boldsymbol{DT_j}$. O caminho crítico corresponde aos arcos cujas restrições cuja variável dual é 1.

Modelo (PL) 2: **Max z** = $\sum_{(i,j)} d_{ij}\, x_{ij}$

s. a: $\sum_j \boldsymbol{x_{ij}}$ - $\sum_j \boldsymbol{x_{ji}}$ = $\begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{se\ nodo\ i\ for\ origem} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{se\ i\ for\ nodo\ intermédio} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{se\ nodo\ i\ for\ destino} \end{cases}$

$\boldsymbol{x_{ij}} \geq \mathbf{0}$

$\boldsymbol{x_{ij}}$ **-** Montante de fluxo no arco (actividade) ***(i, j)***

$\boldsymbol{d_{ij}}$ **-** Duração da actividade ***(i, j)***

Nota 1. Pretende obter-se o caminho mais longo entre a origem (inicio do projecto) e o destino (fim do projecto). Para o efeito, “transporta-se” uma unidade da origem para o destino pelo caminho mais longo.

Nota 2. $\boldsymbol{x_{ij}}$ = 1 significa que a actividade (i, j) é uma actividade crítica (faz parte do caminho mais longo/crítico). Se houver solução óptima alternativa, significa que há mais do que um caminho crítico. $\boldsymbol{x_{ij}}$ = 0 significa que a actividade (i, j) não é crítica?

PERT ALEATÓRIO (ver texto complementar)

Hipótese Beta. Quando as durações das actividades são incertas e se desconhece o seu comportamento probabilístico, assume-se que as mesmas são variáveis aleatórias com uma distribuição beta. É a chamada Hipótese Beta.

A utilização da hipóteses beta pressupõe que é possível estabelecer, para cada actividade, estimativas para as durações ***mais provável***, ***optimista*** e ***pessimista.***

Duração mais provável, designada por **($\boldsymbol{m}$)**, é o tempo de duração em condições normais, que se obtém frequentemente quando a actividade se realiza muitas vezes nas mesmas circunstâncias.

Duração optimista, designada por **(a)**, é tempo mínimo requerido para concluir uma actividade se todas as condições em que a mesma é executada forem favoráveis, isto é, tudo decorre num contexto favorável e de bom funcionamento. Em termos práticos, a probabilidade de a actividade ser realizada num tempo inferior à duração optimista é muito pequena, não superior a 1%.

Duração pessimista, designada por **(b),** é o tempo máximo que a actividade pode levar a ser concluída se as condições forem desfavoráveis, caso em que há manifesta "infelicidade", devido, por exemplo, a avaria de máquinas, cortes de corrente eléctrica, doença de algum trabalhador, condições climatéricas adversas no caso de obras no exterior, atraso nos abastecimentos, etc.

De acordo com esta hipótese, a duração de cada actividade é uma v. A. Beta com os seguintes parâmetros (ver texto):

Média: $\boldsymbol{E[T] = \mu = \frac{a+b+4m}{6}}$ **;** **Variância:** $\boldsymbol{V[T] = \sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2}$

Em que a média é obtida a partir da média ponderada das três estimativas, com o valor mais provável a "valer" quatro vezes mais do que os valores extremos, e o desvio padrão a ser um sexto da amplitude de variação. O método de obtenção da média é conhecido por método dos três pontos ou das três estimativas.

A determinação do comportamento da duração do projecto necessita de algumas hipóteses simplificadoras adicionais, para além da já referida atrás.

Hipótese 1 (já referida). A duração de cada actividade, quando não conhecida, é suposto ter uma distribuição Beta, com média e variância das pelas expressões anteriores.

Hipótese 2. As durações das actividades do projecto são estatisticamente independentes. Com esta hipótese pretende assegurar-se que cada actividade é independente de qualquer outra, o que nem sempre acontece, sobretudo se as circunstâncias que determinam a sua maior ou menor duração são as mesmas que se verificam para outras actividades. No entanto, o abandono desta hipótese complica, e muito, a sua resolução por via analítica. Debaixo desta hipótese, a variância da soma das actividades de qualquer caminho, em particular do caminho crítico, é dada pela soma das variâncias das actividades envolvidas.

Hipótese 3. Assume-se que o caminho crítico, calculado com base nas durações médias das actividades da rede, requer sempre mais tempo do que qualquer outro caminho, isto é, é sempre o caminho mais longo, o que nem sempre é verdade em contexto aleatório. Quando o caminho crítico, obtido com base nas durações médias, é significativamente mais longo do que qualquer um dos outros esta hipótese tem boa aderência á realidade.

Hipótese 4. A distribuição de probabilidade da duração de qualquer caminho é assimptoticamente normal, com média dada pela soma das médias e variância dada pela soma das variâncias das actividades que constituem o caminho. Esta hipótese baseia-se no teorema do limite central.

Designando por:

$\boldsymbol{T_{ij}}$ - Duração (variável aleatória) da actividade *(i,j)*, com *(i,j)* pertencente ao conjunto das actividades do projecto;

$\boldsymbol{\mu_{ij}}$ – Duração média da actividade *(i,j)*;

$\boldsymbol{\sigma_{ij}}$ – Desvio padrão da duração da actividade *(i,j)*;

$\boldsymbol{T_c}$ – Duração (variável aleatória) do caminho crítico do projecto, calculado com base nas durações médias das actividades críticas;

$\boldsymbol{\mu_c}$ – Duração média do caminho crítico do projecto;

$\boldsymbol{\sigma_c}$ – Desvio padrão da duração do caminho crítico do projecto;

C – Conjunto das actividades do caminho Crítico do projecto;

C – Conjunto das actividades do caminho Crítico do projecto;

Vem então

$$\boldsymbol{T_c = \sum_{(i,j)\in C} T_{ij}}\,; \qquad \boldsymbol{\mu_c = \sum_{(i,j)\in C} \mu_{ij}}; \qquad \boldsymbol{\sigma_c = \sqrt{\sum_{(i,j)\in C} {\sigma^2}_{ij}}}; \qquad \boldsymbol{\frac{T_c - \mu_c}{\sigma_c} \overset{0}{\sim} N(0;1)}$$

Nota 1. No caso de existir mais do que um caminho crítico com base nas durações médias, considera-se como σ_c o que resulta com maior desvio padrão de entre os que apresentam a mesma duração média mais elevada, pois apresenta maior risco e, consequente, maior probabilidade de ser o caminho mais longo, isto é, de ser efectivamente o caminho crítico.

Nota 2. O facto de esta metodologia basear as estimativas da duração média do projecto, μ_c, e do seu desvio padrão, σ_c, num único caminho crítico pode sobrestimar a probabilidade de finalização do projecto num determinado prazo, principalmente se existirem outros caminhos paralelos quase críticos (com duração média próxima) e/ou com desvios padrões mais elevados. Sabe-se que o projecto só se realiza dentro de um prazo determinado se todos os caminhos tiverem uma duração inferior ou igual a esse prazo. Este método assume que a probabilidade de qualquer outro caminho ter uma duração superior à do caminho considerado crítico é nula. A simulação procura resolver algumas destas dificuldades.

O Modelo CPM: Relação Tempo-Custo

Em contexto determinístico, a redução do tempo de realização do projecto decorre em geral de duas situações:

- Por imperativos técnicos exteriores determinados pelo promotor. Os trabalhos de preparação de um concerto têm de estar finalizados antes do inicio do concerto, ou o projecto de realização de uma exposição têm de estar prontos antes da data marcada para o inicio da mesma – por exemplo a Expo 98 em lisboa);

- Por razões económicas. Devido à existência de eventuais receitas adicionais (ou menor custos indirectos) por menor duração versus custos directos adicionais por acelerar algumas actividades pode ser vantajoso reduzir a duração do projecto. Uma entidade pública pode estabelecer bónus em função da antecipação da entrega de uma obra pública (por exemplo devido á proximidade de umas eleições).

Em ambos os casos a redução do prazo implica custos adicionais devido á aceleração na realização de algumas actividades (mais pessoal, mais horas de trabalho, etc.).

Seja:

$\boldsymbol{dn_{ij}}$ - **Duração normal** da actividade *(i,j)*. É a duração estimada em condições normais de funcionamento;

$\boldsymbol{da_{ij}}$ – **Duração acelerada** da actividade *(i,j).* É a menor duração que se consegue no actual estado da tecnologia, a trabalhar a pleno e com horário máximo possível;

$\boldsymbol{cn_{ij}}$ – Custo directo com a realização da actividade *(i,j)* na sua duração normal, ou **custo normal**;

$\boldsymbol{ca_{ij}}$ – Custo directo com a realização da actividade *(i,j)* na sua duração acelerada, ou **custo acelerado**;

$\boldsymbol{k_{ij}}$ – Custo unitário de aceleração da actividade *(i,j).* Assume-se que este custo é linear, isto é:

$$\boldsymbol{k_{ij}} = \frac{\boldsymbol{ca_{ij} - cn_{ij}}}{\boldsymbol{dn_{ij} - da_{ij}}};$$

$\boldsymbol{x_{ij}}$ - Duração da actividade *(i,j)* (variável de decisão): $\boldsymbol{da_{ij}} \leq \boldsymbol{x_{ij}} \leq \boldsymbol{dn_{ij}}$

$\boldsymbol{y_{ij}}$ - Redução de tempo (aceleração) que a actividade *(i,j)* vai ter : $\boldsymbol{y_{ij}} = \boldsymbol{dn_{ij}} - \boldsymbol{x_{ij}} \leq \boldsymbol{dn_{ij}} - \boldsymbol{da_{ij}}$

$\boldsymbol{x_j}$ – Momento de ocorrência do acontecimento *j, j=1,…n*. $\boldsymbol{x_0} = \mathbf{0}$; $\boldsymbol{x_n} = \textbf{Duração do projecto}$

s – Receita, no caso de existir, por unidade de tempo de antecipação na duração do projecto em relação a uma duração T pré-estabelecida;

Modelo 1: Realização do projecto num prazo máximo estabelecido T

Min z = $\sum_{(i,j)} k_{ij}\, y_{ij}$

s.a: $\boldsymbol{x_j} - \boldsymbol{x_i} + \boldsymbol{y_{ij}} \geq \boldsymbol{dn_{ij}}$

$\boldsymbol{y_{ij}} \leq \boldsymbol{dn_{ij}} - \boldsymbol{da_{ij}}$

$\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{x_0} \leq \boldsymbol{T}$

$\boldsymbol{y_{ij}}, \boldsymbol{x_j} \geq 0$

para todos os arcos *(i,j)*

ou

Min z = $\sum_{(i,j)} \boldsymbol{k_{ij}}(\boldsymbol{dn_{ij}} - \boldsymbol{x_{ij}})$

s.a: $\boldsymbol{x_j} - \boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x_{ij}} \geq 0$

$\boldsymbol{x_{ij}} \geq \boldsymbol{da_{ij}}$

$\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{x_0} \leq \boldsymbol{T}$

$\boldsymbol{x_{ij}}, \boldsymbol{x_j} \geq 0$

para todos os arcos *(i,j)*

Modelo 2: Optimização dos ganhos do projecto

Max z = $\sum_{(i,j)}\{s[T-(x_n-x_0)]-k_{ij}y_{ij}\}$

s.a: $x_j - x_i + y_{ij} \geq dn_{ij}$

$y_{ij} \leq dn_{ij} - da_{ij}$

$x_n - x_0 \leq T$

$y_{ij}, x_j \geq 0$

para todos os arcos *(i,j)*

ou

Max z = $\sum_{(i,j)}\{s[T-(x_n-x_0)]-k_{ij}(dn_{ij}-y_{ij})\}$

s.a: $x_j - x_i - x_{ij} \geq 0$

$x_{ij} \geq da_{ij}$

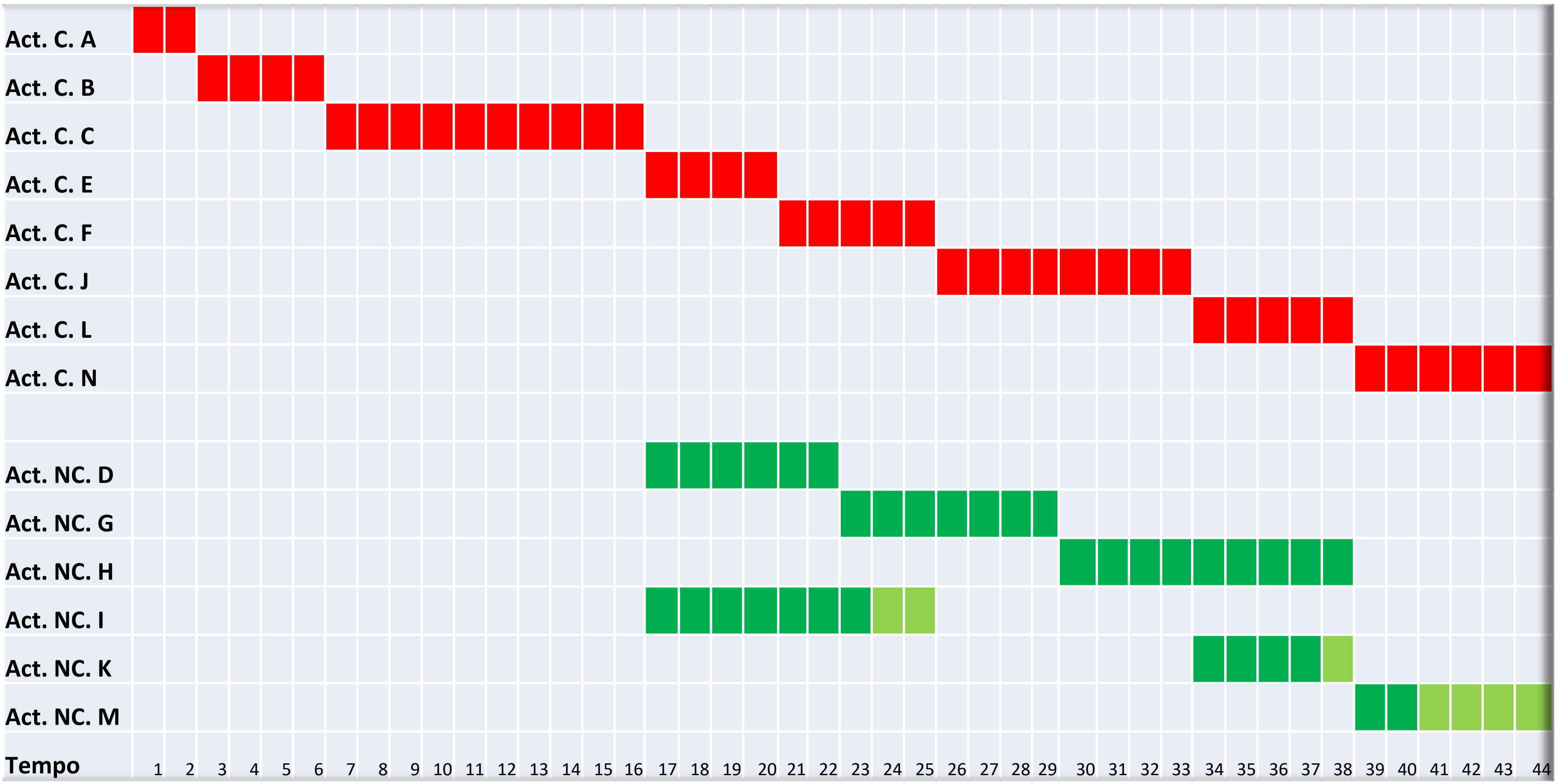
$x_n - x_0 \leq T$

$x_{ij}, x_j \geq 0$

para todos os arcos *(i,j)*

Nota. Á medida que actividades vão sendo aceleradas vão aparecendo novos (adicionais) caminhos críticos. Inicialmente, para reduzir a duração do projecto é necessário acelerar actividades críticas.

CALENDÁRIO (DIAGRAMA TEMPORAL) DO PROJECTO - TIME SCHEDULE



Actividades críticas
Actividades Não Críticas

Nota. As actividades não críticas iniciam-se na sua Data mais Cedo de Início. O diagrama evidencia a Margens/flexibilidade das actividades.